Análisis Matemático I – Relación 2

1. Justifica la existencia de abiertos difeomorfos A y B de $\mathbb{R}^2$ verificando que $(1,1)\in A$, $(0,1)\in B$ y que para cada $(x,y)\in A$ existe un único $(u,v)\in B$ tal que:

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{e}^u + y\,\mathrm{e}^v &= 1+\mathrm{e} \\ u\,\mathrm{e}^x + v\,\mathrm{e}^y &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

   Calcula la matriz jacobiana en $(1,1)$ de la aplicación $(x,y)\mapsto (u(x,y), v(x,y))$.

2. Calcula y clasifica los puntos críticos de la función $z=z(x,y)$ definida implícitamente por la igualdad $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.

3. Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ y supongamos que para todos $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ se verifica que:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{y})\|$$

   Prueba que $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$ es invertible en todo punto $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, que $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$ es cerrado y que $\mathbf{F}$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

4. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular un punto de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

   tal que el segmento determinado por la intersección de la tangente a la elipse en dicho punto con los ejes coordenados tenga longitud mínima.

5. Calcula los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x,y,z)=xy^2z^3$ en la bola $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

Para entregar el viernes 24 de enero.